Magic Square and Sequence

Auteur: Daniel PADROSA

Contraintes définissant le carré

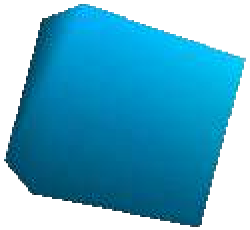
- « Les n^2 cases du carré sont comprises dans l'intervalle $[1,n^2]$ et sont toutes distinctes »

- « La somme de chaque ligne est égale à la somme de chaque colonne et des deux diagonales principales. »

Création de la variable magique:

$$var = n(n^2+1)/2.$$

La somme de chaque colonne, chaque ligne ,chaque diagonale principale est égale à var.



Technique de résolution pour un carré de taille impaire.

Utilisation de la méthode de Bachet.

Pour un carré de taille 5,
Placement des 25 premiers nombres
 entiers non nuls.

				5				
			4		10			
		3		9		15		
	2		8		14		20	
1		7		13		19		25
	6		12		18		24	
		11		17		23		
			16		22			
				21				

On compléte en déplaçant les triangles exterieures.

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Technique de résolution pour un carré de taille paire (Suite)

Méthode des Croix

On commence par écrire , dans l'ordre, les n^2 premiers entiers naturels non nuls dans le carré.
On subdivise le carré initial 4 sur 4 dont on repère les diagonales (les croix).
On remplace alors chaque case se trouvant traversée par la croix par son complément à n^2+1.

Technique de résolution pour un carré de taille paire (Suite).

Méthode des Croix.

Exemple pour un carré de taille 8.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	69	68	51	50	65
17	47	46	77	76	43	42	73
40	55	54	37	36	51	50	33
32	63	62	29	28	59	58	25
41	23	22	37	36	19	18	33
49	15	14	45	44	11	10	41
8	23	22	5	4	19	18	1

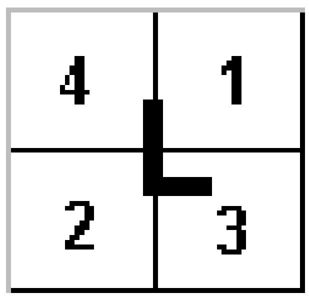
Technique de résolution pour un carré de taille paire (Suite).

Méthode des mirroirs.

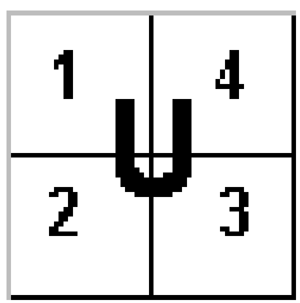
Elle consiste à considérer le carré comme un tore,
où le bord supérieure touche le bord inférieure et
le bord droit touche le bord gauche.
On Place le 1 au centre de la 1ére ligne du carré.
Les miroirs se situent sur les bords du bas et à gauche
du carré.
Par réflexion on complète le carré.
Lorsqu'une diagonale est complétée,on continue en
plaçant le nombre sur la case du dessous.

Technique de résolution pour un carré de taille paire (Suite).

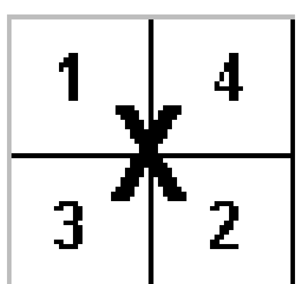
Méthode LUX



Déplacement L



Déplacement U



Déplacement X

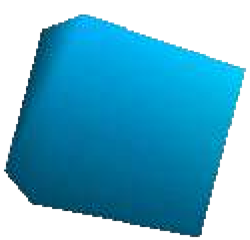
Technique de résolution pour un carré de taille paire (Suite).

Méthode LUX.

On écris:
m+1 lignes de L. 1 ligne de U. m-1 lignes de X.

L	L	L	L	L
L	L	L	L	L
L	L	U	L	L
U	U	L	U	U
X	X	X	X	X

68	65	96	93	4	1	32	29	60	57
66	67	94	95	2	3	30	31	58	59
92	89	20	17	28	25	56	53	64	61
90	91	18	19	26	27	54	55	62	63
16	13	24	21	49	52	80	77	88	85
14	15	22	23	50	51	78	79	86	87
37	40	45	48	76	73	81	84	9	12
38	39	46	47	74	75	82	83	10	11
41	44	69	72	97	100	5	8	33	36
43	42	71	70	99	98	7	6	35	34



Code choco des verifications

```
int var=((((n)*(n))+1)* (n))/2;
/* contraintes chaques cases du carré à une valeurs différentes. */

/* Avec l'ancienne version de choco tester: */
//pb.post(new AllDifferent(this.MatriceCarreToMatriceLine(carre,n)));
pb.post(pb.allDifferent(this.MatriceCarreToMatriceLine(carre,n)));

/* Somme de la diagonale de bas en haut égale à la constante var. */
pb.post(pb.eq(pb.sumD(carre,n),var));

/* Somme de la diagonale de haut en bas égale à la constante var. */
pb.post(pb.eq(pb.sumDI(carre,n),var));

/* Somme de chaques lignes et colonnes soient égales à la constante var. */
for (int i=0;i<n;i++){
pb.post(pb.eq(pb.sum(carre[i]),var));
pb.post(pb.eq(pb.sumC(carre,i,n),var));
}
```

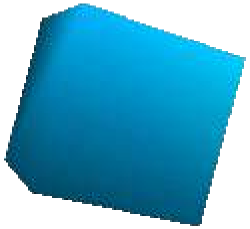
Notion de Carré Latin

« Les n² cases du carré sont compris dans l'intervalle [0,n-1] ou [1,n] cela n'a pas d'importance»

« Chaque ligne et chaque colonne a des élèments distincts »

Heuristiques de résolution:

Il suffit de remarquer que le carré latin peut être considerer comme une table d'addition de pyhagore.
Dès que la somme d'une ligne et d'une colonne est plus grande que n la case correspondante aura par exemple comme valeur le chiffre des unités de cette addition pour un carré inféreure à 10.
Temps de résolution polynomiale jusqu' à n = 100.



Technique de résolution (Suite)

Table d'addition de pythagore.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Carré Orthogonal/Heterogène et sequence magique

Méthode des carrés latins orthogonaux

Deux carré latins sont orthogonaux ssi chaque couple (A1ij,A2ij) n'apparait qu'une fois.

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & C & B & D \\ D & B & C & A \\ C & A & D & B \\ B & D & A & C \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} A,1 & C,4 & B,3 & D,2 \\ D,3 & B,2 & C,1 & A,4 \\ C,2 & A,3 & D,4 & B,4 \\ B,4 & D,1 & A,2 & C,3 \end{bmatrix}$$

Carré Heterogène

Carré dont chaque élèment est distincts et compris dans l'intervalle [1,n²].
Chaque somme de colonnes ,lignes et diagonales principales ont des valeurs distinctes dans un intervalle très grand.

Séquence magique

Une séquence magique est une séquence x0,x1,....,xn de nombres telles que 0 apparaît x0 fois dans la séquence,..,xi apparaît xi fois.

Utilisation en Choco de la fonction occurrence de la classe Problem:
occurence(Intvar[] ligne,int occur ,IntVar elem)

Grille de resultats par seconde

Taille/carre	Carre magique	Carre Latin	Carre heterogene	Carre orthogonal	Sequence
5	1	1	1	2	1
10	2	1	12		1
20	3	1			1
25	9	1			1
30	27	1			1
37	50	1			1